**1** Nalezněte potenciál pole $\vec{F} = (y + yz, x + xz + 3z^3, xy + 9yz^2 - 1)$ a pomocí něj vypočtěte práci, která se vykoná při pohybu po spirále začínající v počátku a končící v bodě $A = (-3, 2, -1)$.

$\int_C \vec{F}\,ds$ C od $O(0,0,0)$ do $A(-3,2,-1)$

$= f(A) - f(0)$

$\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{o} \iff \exists f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad \operatorname{grad} f = \vec{F}$

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y+yz & x+xz+3z^3 & xy+9yz^2-1 \end{vmatrix} = \left(x+9z^2-(x+9z^2), -(y-y), 1+z-(1+z)\right) = (0, 0, 0) = \vec{o}$$

① $\frac{\partial f}{\partial x} = y+yz$

② $\frac{\partial f}{\partial y} = x+xz+3z^3$

③ $\frac{\partial f}{\partial z} = xy+9yz^2-1$

① $\Rightarrow$ * $f = \int (y+yz)\,dx = xy+xyz+g(y,z)$ ② $x+xz+\frac{\partial g}{\partial y}(y,z) = x+xz+3z^3$

$\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y}(y,z) = 3z^3 \quad g(y,z) = \int 3z^3\,dy = 3yz^3 + h(z)$ do *

** $f = xy+xyz+3yz^3+h(z)$ ③ $xy+9yz^2+h'(z) = xy+9yz^2-1$

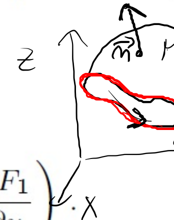
$h'(z) = -1, \quad h(z) = \int -1\,dz = -z+k, \ k \in \mathbb{R}$ do **

$f = xy+xyz+3yz^3-z+k, \quad k \in \mathbb{R}$

$\int_C \vec{F}\,ds = f(-3,2,-1) - f(0,0,0) = -6+6-6+1+\cancel{k}-\cancel{k} = -5$

**Stokesova věta** je zobecnění Greenovy věty z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^3$ (orientovaná plocha, jejímž okrajem je křivka $\mathcal{C}$, už může být různě zakřivená v prostoru):

$$\int_{\mathcal{C}=\partial M} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint_M \operatorname{rot}(\vec{F})\cdot d\vec{S}\ ,$$




kde

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) := \nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z},\ -\left(\frac{\partial F_3}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial z}\right),\ \frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right).$$

Orientace plochy a jejího okraje musí být v souladu a to pomocí pravidla pravé ruky (ruku položíme na plochu poblíž okraje tak, aby vektor její orientace mířil do dlaně a palec ukazoval směrem dovnitř plochy - pak zbylé prsty ukazují směr orientace okraje), nebo jednodušeji - když obcházíme plochu podél okraje, musíme ji aktuálně mít vždy po levé straně.

## 2 Spočítejte práci síly

$\int_C \vec{F}\, ds$

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(x^x+z^2\right)\vec{i} + \left(y^y+x^2\right)\vec{j} + \left(z^z+y^2\right)\vec{k}$$

vykonané na částici, která se pohybuje podél okraje části sféry $x^2+y^2+z^2=4$ ležící v prvním oktantu. Křivka $\mathcal{C}$ daná okrajem této plochy je pozitivně orientovaná.

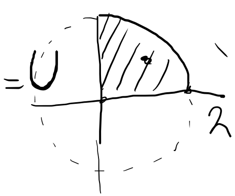
$x \geq 0$
$y \geq 0$
$z \geq 0$

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x^x+z^2 & y^y+x^2 & z^z+y^2 \end{vmatrix} = (2y-0,\ -(0-2z),\ 2x-0) = (2y,\ 2z,\ 2x)$$


$M:\ \Phi(x,y) = \left(x, y, \sqrt{4-x^2-y^2}\right),\quad (x,y)\in U$

$\boxed{\begin{matrix}\Phi_\sigma \times \Phi_\varphi \\ \Phi(\sigma,\varphi)\end{matrix}}$

$\pi_{12} M = U$




$z^2 = 4-x^2-y^2$
$z = \pm\sqrt{4-x^2-y^2}$

$$\overbrace{\Phi(x,y) = \left(x, y, \sqrt{4-x^2-y^2}\right)}^{M} \qquad (x,y)\in U$$


$$\operatorname{rot}\vec F = 2(y,z,x)$$

$$\begin{array}{cccc} & e_1 & e_2 & e_3 \end{array}$$

$$\vec\Phi_x = \left(1, 0, \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{4-x^2-y^2}}\right)$$

$$\vec\Phi_y = \left(0, 1, \frac{-\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{4-x^2-y^2}}\right)$$

$$\vec\Phi_x\times\vec\Phi_y = \left(\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, 1\right) = \vec n \qquad \underline{\underline{1>0}} \qquad \nearrow \vec n$$

$$\int_C \vec F\, ds = \iint_M \operatorname{rot}\vec F\, dS = \iint_U \left(2y, 2\sqrt{4-x^2-y^2}, 2x\right)\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, 1\right) dA =$$

$$= \iint_U \left(\frac{2xy}{\sqrt{4-x^2-y^2}} + 2y + 2x\right) dA \underset{\text{pol.}}{=} \int_0^{\pi/2}\int_0^2 \left(\frac{2\rho^2\cos\varphi\sin\varphi}{\sqrt{4-\rho^2}} + \underbrace{2\rho\sin\varphi + 2\rho\cos\varphi}_{2\rho(\sin\varphi+\cos\varphi)}\right)\rho\, d\rho\, d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi/2} 2\cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi \cdot \int_0^2 \frac{\rho^3}{\sqrt{4-\rho^2}}\, d\rho + \int_0^{\pi/2} (\sin\varphi + \cos\varphi)\, d\varphi \cdot \int_0^2 2\rho^2\, d\rho =$$

$$= \left[\sin^2\varphi\right]_0^{\pi/2}\cdot\frac{16}{3} + \left[-\cos\varphi + \sin\varphi\right]_0^{\pi/2}\cdot 2\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^2 =$$

$$= \frac{16}{3} + (1+1)\cdot\frac{16}{3} = 16.$$

$$\int_0^2 \frac{\rho^3}{\sqrt{4-\rho^2}}\,d\rho =$$

$$-\int \frac{-2\rho \cdot \rho^2}{2\sqrt{4-\rho^2}}\,d\rho = \left|\text{per partes}\;\begin{matrix} \rho^2 & \dfrac{-2\rho}{2\sqrt{4-\rho^2}} \\ 2\rho & \sqrt{4-\rho^2} \end{matrix}\right| = -\left[\rho^2\sqrt{4-\rho^2} + \int -2\rho\sqrt{4-\rho^2}\,d\rho\right] = ※$$

$$\int \frac{-2\rho}{2\sqrt{4-\rho^2}}\,d\rho = \left|\text{subs.}\;\begin{matrix} 4-\rho^2 = u \\ -2\rho\,d\rho = du \end{matrix}\right| = \int \frac{1}{2\sqrt{u}}\,du = \sqrt{u} = \sqrt{4-\rho^2}$$

$$\int -2\rho\sqrt{4-\rho^2}\,d\rho = \Big|\;\downarrow\;\Big| = \int \sqrt{u}\,du = u^{3/2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{3}(4-\rho^2)^{3/2}$$

$$※\left[-\rho^2\sqrt{4-\rho^2} - \frac{2}{3}(4-\rho^2)^{3/2}\right]_0^2 = +\frac{2}{3}\,4^{3/2} = \frac{16}{3}$$

3. Pomocí Stokesovy věty spočítejte

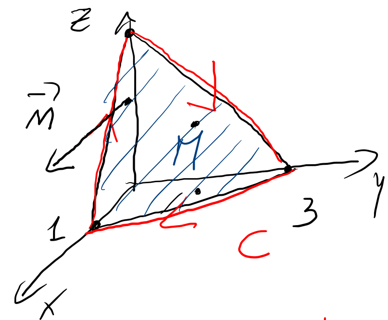
$$\int_{C} \vec{F}\cdot d\vec{s}, = \iint_M \operatorname{rot}\vec{F}\, dS$$

$ax+by+cz=3 \qquad \vec{v}=(a,b,c)$

kde $\vec{F}(x,y,z) = (xz, 2xy, 3xy)$ a $\mathcal{C}$ je hranice části roviny $3x+y+z=3$, která je v prvním oktantu. Okraj plochy je orientovaný v záporném smyslu při pohledu seshora (neboli: jestliže křivku, která tvoří okraj zprojektujeme do roviny $xy$, bude mít tento její obraz zápornou orientaci).

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ xz & 2xy & 3xy \end{vmatrix} = \langle 3x-0, -(3y-x), 2y-0\rangle$$

$$= (3x, x-3y, 2y)$$




$C = \partial M$

$M : \vec{\Phi}(x,y) = (x, y, 3-3x-y), \quad (x,y)\in T$

$\vec{\Phi}_x = (1, 0, -3) \qquad \Phi_x \times \Phi_y = (3, 1, \underline{\underline{1}}) \qquad \vec{n} = -(\Phi_x \times \Phi_y) = (-3, -1, -1)$

$\vec{\Phi}_y = (0, 1, -1)$

$\pi_{12} M = T$


$3x+y=3$

$y = 3-3x$

$$\iint_M \operatorname{rot}\vec{F}\, dS = \iint_T (3x, x-3y, 2y)\cdot(-3,-1,-1)\, dA =$$

$$= \iint_T (-9x - x + 3y - 2y)\, dA = \int_0^1 \int_0^{3-3x} (-10x+y)\, dy\, dx =$$

$$= \int_0^1 \left\{ -10x(3-3x) + \frac{(3-3x)^2}{2} \right\} dx = -\frac{7}{2}$$

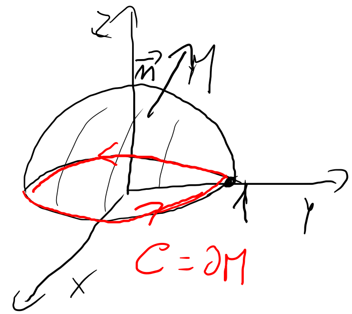
4. Pomocí Stokesovy věty spočítejte

$$\iint_M \operatorname{rot}(\mathbf{F})\cdot d\mathbf{S}, = \int_C \vec{F}\, ds \qquad C = \partial M$$

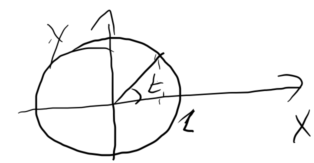
kde $\mathbf{F}(x,y,z) = (xyz, x, e^{xy}\cos z)$ a $M$ je polosféra $x^2+y^2+z^2=1$ a $z\geq 0$ s orientací směrem vzhůru.

$$C: \ \vec{\varphi}(t) = (\cos t, \sin t, 0) \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

$$\vec{\varphi}\,'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$$




$$\int_C \vec{F}\, ds = \int_0^{2\pi} (0, \cos t, e^{\cos t \sin t}\, 1)\cdot(-\sin t, \cos t, 0)\, dt$$




$$= \int_0^{2\pi} 0 + \cos^2 t + 0\, dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \underbrace{\frac{\cos 2t}{2}}_{0}\right) dt = \pi.$$

**Gaussova věta**

$$\iint_{\partial E} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_{E} \operatorname{div}(\mathbf{F})\; dV$$

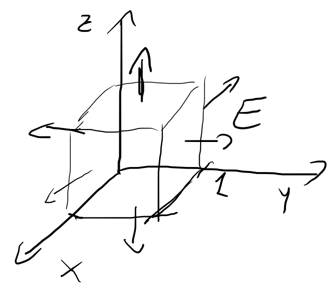
dává do souvislosti tok pole $\mathbf{F}$ přes okraj $M = \partial E$ oblasti $E$ v $\mathbb{R}^3$ s integrálem přes tuto oblast $E$. Okraj $\partial E$ má zde vždy vnější orientaci. Funkce

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z},$$

která se integruje v $M$ se nazývá divergence pole $\mathbf{F}$ a interpretuje se jako "zdroj"pole v daném bodě (při kladné hodnotě) případně "odtok"pole v daném bodě (při záporné hodnotě). Smyslem Gaussovy věty tedy je, že celková "změna pole"v objemu odpovídá příslušnému toku pole přes okraj.

**5** Pomocí Gaussovy věty spočítejte tok pole $\vec{F} = (3x,\ xy,\ 2xz)$ povrchem krychle $E = \langle 0, 1\rangle^3 \subseteq \mathbb{R}^3$ s vnější orientací.

$$\iint_S \vec{F}\, dS$$




$$\iiint_E \operatorname{div}\vec{F}\, dV = \iiint_E \left[\frac{\partial}{\partial x}(3x) + \frac{\partial}{\partial y}(xy) + \frac{\partial}{\partial z}(2xz)\right] dV =$$

$$= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (3 + x + 2x)\, dx\, dy\, dz = \int_0^1 dz \cdot \int_0^1 dy \cdot \int_0^1 (3 + 3x)\, dx =$$

$$= \left[3x + \frac{3x^2}{2}\right]_0^1 = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

6 Pomocí Gaussovy věty určete $\iint\limits_M \vec{F}\cdot d\vec{S}$ kde $\vec{F}(x,y,z) = (x,\ y,\ z)$ a $M$ je část paraboloidu $z = 1-x^2-y^2$ pro $z \geq 0$ s orientací danou vektorovým polem směřujícím vzhůru.


$\operatorname{div}\vec{F} = 1+1+1=3$

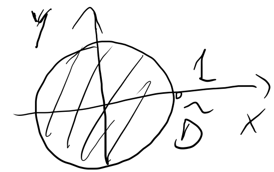
$\iint_{M\cup D} \vec{F}\, d\vec{S} = \iiint_E 3\, dV$

$E = \{(x,y,z) : 0 \leq z \leq 1-x^2-y^2\}$

$\partial E = M \cup D$

$\iiint_E 3\, dV = \iint_M \vec{F}\, dS + \iint_D \vec{F}\, dS$

$\iint_M \vec{F}\, dS = 3\iiint_E dV - \iint_D \vec{F}\, dS$




$D = \phi(x,y) = (x,y,0)$ $\qquad -(\phi_x\times\phi_y) = (0,0,1)\cdot(-1) = (0,0,-1)$

$\phi_x\times\phi_y = (1,0,0)\times(0,1,0)$

$\tilde{D} = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$

$\iint_D \vec{F}\, dS = \iint_{\tilde{D}} (x,y,0)\cdot(0,0,-1)\, dA = 0$

$\iiint_E 3\, dV \underset{cyl.}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{1-\rho^2} 3\rho\, dz\, d\rho\, d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^1 3\rho(1-\rho^2)\, d\rho\, d\varphi = 2\pi\left[3\frac{\rho^2}{2} - 3\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3}{2}\pi$

**.7** Pomocí Gaussovy věty spočtěte $\displaystyle\iint_{(M)} \underset{F_1}{x}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \underset{F_2}{y}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \underset{F_3}{(z^2-1)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$ kde $M$ je

hranicí tělesa omezeného plochami $x^2+y^2=1,\quad z=0,\quad z=1$ s vnější orientací.

$$\iint_M \vec{F}\, dS \qquad \vec{F} = (x, y, z^2-1)$$

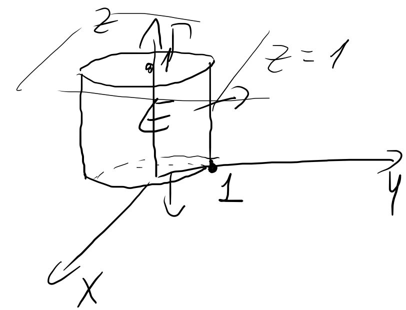
$$\operatorname{div}\vec{F} = 1+1+2z$$

$$\| $$

$$\iiint_E (2+2z)\, dV \underset{\text{cyl.}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^1 \rho(2+2z)\, dz\, d\rho\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^1 \rho\, d\rho \cdot \int_0^1 (2+2z)\, dz =$$

$$= 2\pi \cdot \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^1 \cdot \left[2z+z^2\right]_0^1 = 3\pi .$$



# Dú 10

1 Částice se pohybuje v poli $\vec{F} = (y^2, z^2, x^2)$ po obvodu trojúhelníka $T$, který leží v rovině $x + y + z = 1$ a má vrcholy $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ a $(0, 0, 1)$. Orientace je dána pořadím vrcholů. Pomocí Stokesovy věty zjistěte vykonanou práci.

2, Pomocí Gaussovy věty spočtěte tok pole $\vec{F}(x, y, z) = (z^2+x^2, -xy, 3y)$ hranicí tělesa omezeného plochami $z = 1 - y^2$, $z = 0$, $x = 0$ a $x = 3$. Hranice tělesa je orientovaná vnějším normálovým polem.